Tentamen Talen en Automaten, 29 januari 2007

Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek tentamen.

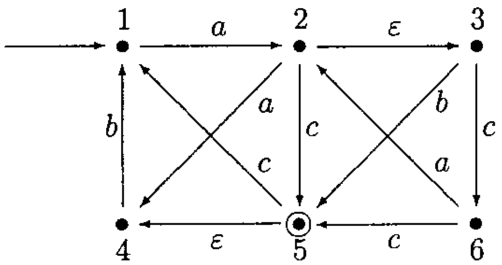
Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen.

Formuleer kort en zakelijk, scherp en zorgvuldig, met steekhoudende argumenten voor de correctheid van je beweringen. Werk netjes. Schrijf duidelijk leesbaar.

Opgave 1 (7 %). Beschouw het alfabet $\Sigma_1 = \{0,1,2,3,4\}$ en de taal L_1 van de strings over Σ_1 die tenminste één keer de deelstring 0123 (aaneengesloten) bevatten. Er geldt dus $101231 \in L_1$ en $01123 \notin L_1$.

Geef een nondeterministische eindige automaat, desgewenst met ε-overgangen, die precies de taal L_1 accepteert. De oplossing moet allereerst correct zijn. Verder geldt dat, hoe minder toestanden en overgangen je gebruikt, hoe meer de oplossing gewaardeerd wordt. Licht je oplossing toe.

Opgave 2 (15 %). Beschouw de nondeterministische eindige automaat A met ε-overgangen over het alfabet $\Sigma = \{a,b,c\}$ gegeven in de figuur:



De toestanden zijn genummerd van 1 tot en met 6. Toestand 1 is de starttoestand en 5 is de enige accepterende toestand.

Zet deze automaat volgens het standaardalgoritme om in een deterministische eindige automaat B die dezelfde taal accepteert. Hoeveel bereikbare toestanden heeft B? Wat is de starttoestand? Welke zijn accepterend?

Opgave 3 (18 %). Beschouw het alfabet $\Sigma_3 = \{0,1,2\}$ en de taal L_3 over Σ_3 gegeven door $L_3 = \{0^i 1^k 2^i \mid i \geq 1 \ \wedge\ k \geq 1\}$.

(a) Formuleer het Pomplemma voor *reguliere* talen.

(b) Bewijs dat de taal L_3 niet regulier is.

(c) Bewijs dat de taal L_3 contextvrij is en geef er een contextvrije grammatica voor.

Z.O.Z.

Allard

Opgave 4 (16 %). Beschouw de stapelautomaat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z)$ met $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ en $\Sigma = \{a, b\}$ en $\Gamma = \{X, Z\}$. De functie δ voldoet aan

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, XXZ)\} , & \delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XXX)\} , \\
\delta(q_0, \varepsilon, Z) = \{(q_0, \varepsilon), (q_1, Z)\} , & \delta(q_0, b, X) = \{(q_0, \varepsilon)\} , \\
\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_0, Z)\} , & \delta(q_1, a, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} , \\
\delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, XZ)\} , & \delta(q_1, b, X) = \{(q_1, XX)\} , \\
\delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_0, XZ)\} , & \delta(q_2, \varepsilon, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} .
\end{array}$$

Alle andere waarden van $\delta(q, u, Z)$ voor $q \in Q$ en $u \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ zijn leeg. L_4 is de taal geaccepteerd door de stapelautomaat P bij lege stapel.
(a) Laat zien dat de taal L_4 de string bab bevat. Geef de rij van configuraties (IDs) en stappen van een accepterende berekening voor bab.
(b) Laat zien dat zolang de stapel niet leeg is, hij van de vorm $X^n Z$ is voor zekere $n \in \mathbb{N}$.
(c) Beschrijf de taal L_4 volledig als een verzameling van strings. Hoeveel symbolen a en b kunnen deze strings bevatten, en in welke volgorde? Geef een argumentatie voor je bewering.

Opgave 5 (14 %). Ontwerp een eenbands enkelspoors Turing machine M met invoeralfabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die zijn invoerstring w verdubbelt. Dit wil zeggen, dat M aangeroepen met invoer w na een eindig aantal stappen eindigt in een accepterende toestand terwijl de band de string ww bevat, met oneindig veel B's aan beide kanten. Het maakt niet uit, waar de leeskop dan staat. Geef een beschrijving van de Turing machine, waaruit duidelijk blijkt dat hij aan zijn specificatie voldoet.

Opgave 6 (4 %). We beschouwen een taal L over het alfabet Σ.
(a) Wanneer is taal L *recursief opsombaar*? Geef de definitie.
(b) Wanneer is taal L *beslisbaar* (oftewel recursief)? Geef de definitie.

Opgave 7 (10 %). Gegeven zijn recursief opsombare talen L_a en L_b. Bewijs dat hun vereniging $L_a \cup L_b$ ook recursief opsombaar is.
Suggestie: gebruik een meerbands TM.

Opgave 8 (16 %). Gegeven is een taal L over het alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die recursief opsombaar is en niet beslisbaar.
(a) Beschouw de complementaire taal $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$. Is $\overline{L}$ recursief opsombaar? Geef een argumentatie.
(b) We definiëren nu $L' = \{0w \mid w \in L\} \cup \{1w \mid w \notin L\}$. Bewijs dat L' niet recursief opsombaar is.